

# PENGGUNAAN METODE CROSS PADA STRUKTUR PORTAL BERGOYANG STATIS TAK TENTU DENGAN KEKAKUAN TIDAK MERATA DALAM SATU BALOK DAN KOLOM.

Jemy wijaya<sup>1)</sup>

Fanywati Itang<sup>2)</sup>

1) Dosen Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Untar  
Email: jemyw@ft.untar.ac.id

2) Dosen Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Untar  
Email: fannywatii@ft.untar.ac.id

## ABSTRAK

*Ada beberapa metode yang bisa dipakai dalam menganalisis balok dengan kekakuan yang tidak merata antara lain metode Consistent Deformation, metode Slope Deflection, metode Clapeyron, dan metode Cross.*

*Dalam tulisan ini akan dibahas penggunaan metode Cross dalam penyelesaian struktur portal bergoyang dengan kekakuan yang tidak merata dalam satu balok dan kolom..*

*Pada penggunaan metode Cross, ada beberapa hal yang harus diketahui terlebih dahulu yaitu kekakuan balok sebelum kita mencari koefisien distribusi pada satu titik percabangan, besar faktor pemindah (carry over factor) dan besaran momen primer (fixed end moment) pada ujung-ujung balok baik akibat beban luar yang bekerja maupun akibat dari pergoyangan (displacement/sway)..*

Kata kunci: kekakuan, koefisien distribusi, faktor pemindah, momen primer, goyangan.

## ABSTRACT

*There are some methods that can be used to analyze the beam with non-uniformed stiffness, i.e: Consistent deformation, Slope deflection, Clapeyron and Cross method.*

*This paper will discuss the Cross implementation to solve the structure of sway portal with non-uniformed stiffness within a beam and column.*

*Using the Cross method, the beam stiffness should be known first prior to get the distribution coefficient at the point of bifurcation, carry-over factor and primary moment (fixed end moment) values at the ends of the beam either due to external working loads or sway/ displacement.*

*Keywords: Stiffness, distribution coefficient, carry-over factor, fixed end moment, sway.*

## 1. PENDAHULUAN.

Metode Cross ini awalnya diperkenalkan oleh Prof. Hardy Cross pada tahun 1930 yang merupakan suatu metode dalam penyelesaian analisis struktural balok kontinu dan kerangka kaku statis tak tentu. Pada hakekatnya metode ini merupakan suatu cara untuk menyelesaikan persamaan-persamaan serempak di dalam metode defleksi dengan pendekatan berturut-turut, dengan ketelitian cukup baik dengan syarat iterasi yang dilakukan minimal lima cycle/putaran (Chu, 1985: 262).

## 2. PENGERTIAN ISTILAH DALAM METODE CROSS

Dalam metode Cross (distribusi momen) terdapat beberapa pengertian sebagai berikut:

- Faktor pemindah/koefisien induksi (*carry over factor*)

Suatu faktor pemindah terhadap perataan momen pada satu titik untuk mendapatkan momen pada ujung titik lainnya.

- Faktor distribusi (*distribution factor*)

Perbandingan besaran momen yang terdistribusi pada batang-batang yang bertemu di satu titik

atau koefisien distribusi untuk besaran momen-momen yang diterima batang-batang yang bertemu pada satu titik percabangan.

- Faktor kekakuan (*stiffness factor*)

suatu faktor pengali yang didapat dari kekakuan balok untuk menentukan besarnya momen di satu titik yang diperlukan untuk berputar sudut dititik tersebut sebesar satu radial.

- Momen primer (*fixed end moment*)

Besaran momen pada ujung balok akibat beban luar dan akibat pergoyangan.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

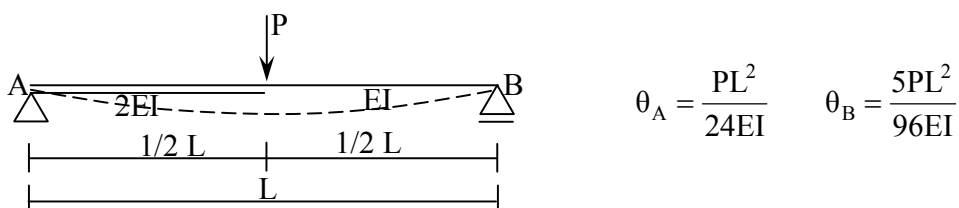
#### 3.1. ANALISIS STRUKTUR METODE CROSS

1. Hitung momen primer setiap balok akibat beban merata maupun terpusat.
2. Hitung momen primer pada kolom akibat pergoyangan.
3. Hitung nilai kekakuan lentur (faktor kekakuan) setiap balok dan kolom.
4. Hitung koefisien distribusi balok dan kolom pada setiap titik kumpul dengan faktor pemindah (*carry over factor*) untuk balok dan kolom.
5. Tahap I (akibat portal tidak bergoyang)  
Buat tabel Cross dan lakukan distribusi momen akibat beban luar sehingga diperoleh momen-momen ujung.
6. Tahap II. (akibat portal bergoyang)  
Buat tabel Cross dan lakukan distribusi momen akibat pengaruh pergoyangan sehingga diperoleh momen-momen ujung.
7. Dari tahap I dan II dicari besar reaksi pendelnya, kemudian kedua reaksi pendel ini dijumlahkan dan disamakan dengan nol dan akan didapatkan suatu angka konstanta.
8. Momen akhir dari ujung-ujung balok dan kolom didapat dengan mengkombinasikan momen-momen akibat tahap I dan II dengan memasukkan angka konstanta pada tahap II.
9. Dengan cara *freebody* kemudian dihitung besaran-besaran reaksi dan gaya-gaya dalam, terakhir digambar bidang Momen. Lintang dan Normal.
10. Untuk menghentikan pendistribusian momen, paling sedikit sudah melakukan 5 putaran dalam perataan momen dan momen yang didistribusikan sudah mencapai nilai yang kecil dibandingkan dengan nilai awal dari momen itu sendiri.

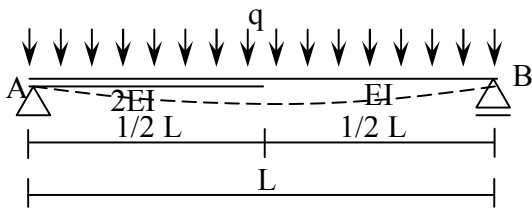
#### 3.2. BESAR PUTARAN SUDUT.

Untuk mendapatkan besaran *Fixed End Moment* (momen primer), *Carry over factor* (COF) dan kekakuan balok (*stiffness factor*) akibat berbagai jenis beban pada balok dan kolom dengan kekakuan yang tidak merata, maka perlu dicari terlebih dahulu besar putaran sudut yang terjadi. Untuk mendapatkan rumus deformasi/putaran sudut akibat berbagai beban digunakan metode unit load. Penurunan rumus tersebut sudah dibahas pada penulisan yang diajukan Wijaya. J (2013).

Dari rumus tersebut, dapat dihasilkan putaran sudut untuk keadaan sebagai berikut:

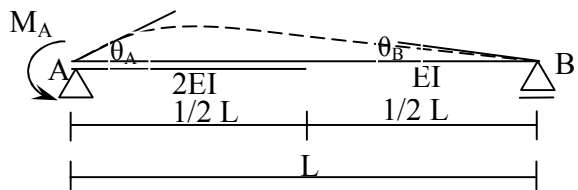


Gambar 1. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban terpusat P ditengah bentang



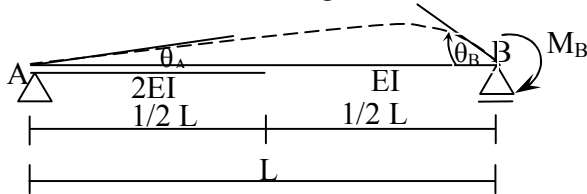
$$\theta_A = \frac{7qL^3}{256EI} (+) \quad \theta_B = \frac{9qL^3}{256EI} (-)$$

Gambar 2. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban



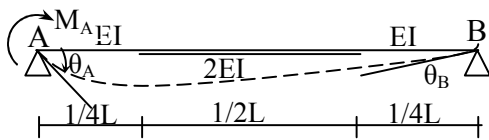
$$\theta_A = \frac{3M_A L}{16EI} (-) \quad \theta_B = \frac{M_A L}{8EI} (+)$$

Gambar 3. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban momen  $M_A$  di titik A



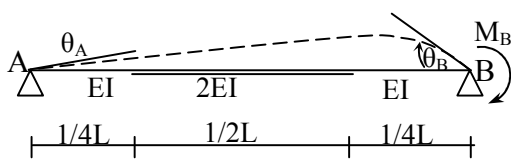
$$\theta_A = \frac{M_B L}{8EI} (-) \quad \theta_B = \frac{5M_B L}{16EI} (+)$$

Gambar 4. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban momen  $M_B$  di titik B



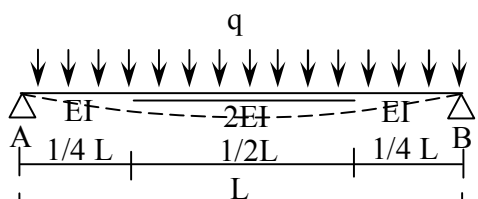
$$\theta_A = \frac{17M_A L}{64EI} (+) \quad \theta_B = \frac{7M_A L}{64EI} (-)$$

Gambar 5. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban momen  $M_A$  di titik A



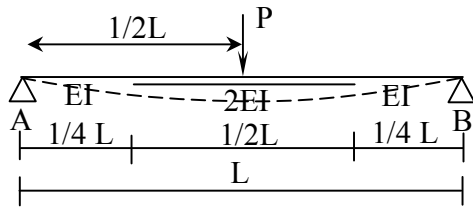
$$\theta_A = \frac{7M_B L}{64EI} (-) \quad \theta_B = \frac{17M_B L}{64EI} (+)$$

Gambar 6. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban momen  $M_B$  di titik B



$$\theta_A = \frac{7}{256} \frac{qL^3}{EI} (+) \quad \theta_B = -\frac{7}{256} \frac{qL^3}{EI} (-)$$

Gambar 7. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban merata  $q$  sepanjang bentang

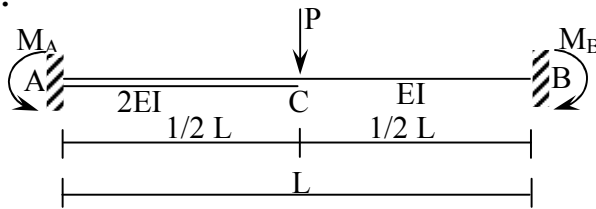


$$\theta_A = \frac{5}{128} \frac{PL^2}{EI} (+) \quad \theta_B = -\frac{5}{128} \frac{PL^2}{EI} (-)$$

Gambar 7. Struktur dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban terpusat P ditengah bentang

### 3.3. FIXED END MOMENT/MOMEN PRIMER.

#### 3.3.1.

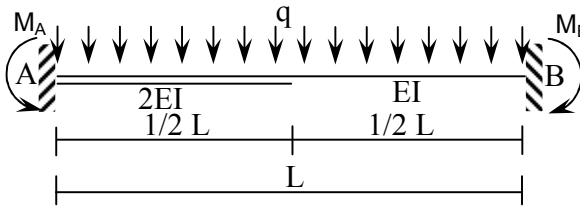


$$FE M_{AB} = -\frac{10}{66} PL$$

$$FE M_{BA} = \frac{7}{66} PL$$

Gambar 8. Struktur Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban terpusat P

#### 3.3.2.

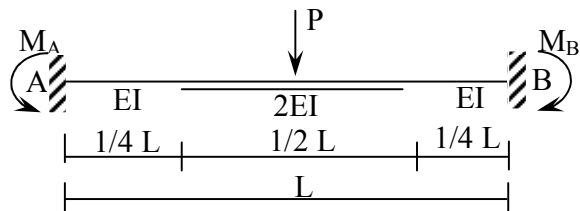


$$FE M_{AB} = -\frac{17}{176} qL^2$$

$$FE M_{BA} = \frac{13}{176} qL^2$$

Gambar 9. Struktur Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban merata q

#### 3.3.3.

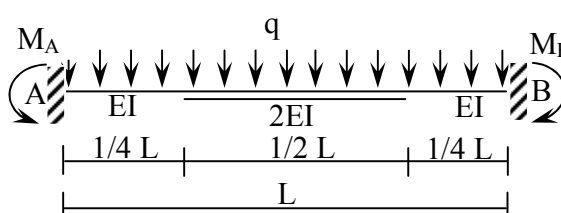


$$FE M_{AB} = -\frac{10}{96} PL$$

$$FE M_{BA} = \frac{10}{96} PL$$

Gambar 10. Struktur Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban terpusat P

#### 3.3.4.

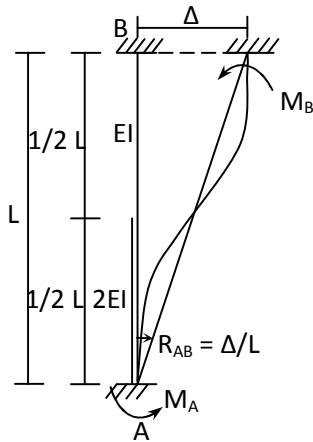


$$FE M_{AB} = -\frac{7}{96} qL^2$$

$$FE M_{BA} = \frac{7}{96} qL^2$$

Gambar 11. Struktur Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI diberi beban merata q

3.3.5.

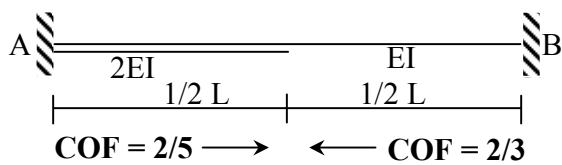


$$FE M_A = -\frac{112EI\Delta}{11L^2}$$

$$FE M_B = -\frac{80EI\Delta}{11L^2}$$

Gambar 12. Struktur Kolom Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI dengan pergoyangan sebesar  $\Delta$

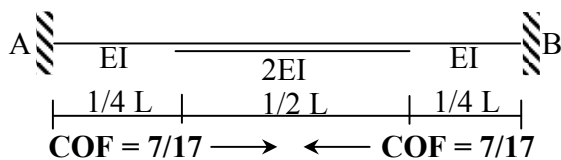
#### 4. STIFFNESS FACTOR (FAKTOR KEKAKUAN) DAN CARRY OVER FACTOR (FAKTOR PEMINDAH)



Kekakuan balok AB adalah  $\frac{80EI}{11L}$

Kekakuan balok BA adalah  $\frac{48EI}{11L}$

Gambar 13. Carry Over Factor untuk Struktur Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI



Kekakuan balok AB adalah  $\frac{68EI}{15L}$

Kekakuan balok BA adalah  $\frac{68EI}{15L}$

Gambar 14. Carry Over Factor untuk Struktur Jepit-jepit dengan kekakuan balok 2EI dan EI

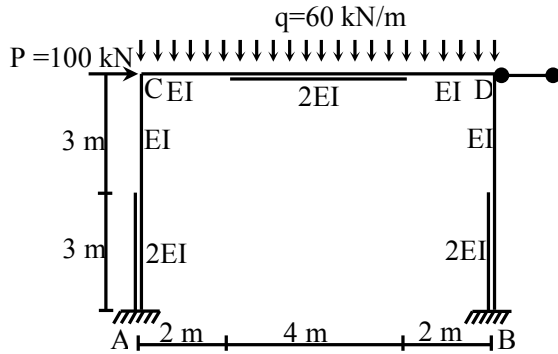
#### 5. ANALISIS FREE BODY DAN GAMBAR BIDANG MOMEN, LINTANG DAN NORMAL

Analisis free body dilakukan untuk menghitung reaksi perletakan akibat beban luar dan momen ujung pada setiap balok.

1. Nyatakan struktur dalam bentuk batang-batang yang bebas.
2. Hitung besarnya reaksi perletakan setiap ujung balok akibat beban luar dan momen ujung yang telah diperoleh.
3. Jumlahkan semua hasil perhitungan langkah 2 untuk memperoleh besarnya reaksi perletakan total.

4. Dengan data-data pada langkah 2, hitung momen maksimum yang terjadi pada setiap balok.
5. Gambar bidang momen, lintang dan normal.

## 6. CONTOH PERHITUNGAN



### Tahap I

Akibat portal tidak bergoyang (titik D dipegang oleh pendel horizontal)

### Koefisien distribusi

$$\mu_{ca} : \mu_{cd} = \frac{48EI}{11(6)} : \frac{68EI}{15(8)} = 0.7273 : 0.5667$$

$$\mu_{ca} = 0.7273/1.294 = 0.5621 \text{ dan}$$

$$\mu_{cd} = 0.5667/1.294 = 0.4379$$

$$\mu_{dc} : \mu_{db} = \frac{68EI}{15(8)} : \frac{48EI}{11(6)} = 0.5667 : 0.7273$$

$$\mu_{dc} = 0.4379 \text{ dan } \mu_{db} = 0.5621$$

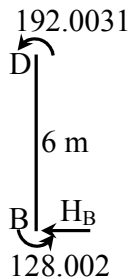
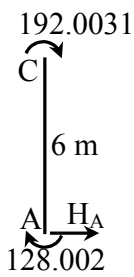
### Fixed end moment (FEM)

$$FEM_{CD} = -\frac{7}{96}qL^2 = -\frac{7}{96}(60)(8)^2 = -280 \text{ kNm}$$

$$FEM_{DC} = \frac{7}{96}qL^2 = +280 \text{ kNm}$$

Tabel 1. Perataan momen akibat beban luar

Titik	A	C		D		B
Batang	AC	CA	CD	DC	DB	BD
Koef. Dist	0	0.5621	0.4379	0.4379	0.5621	0
FEM	0	0	-280	+280	0	0
BALANCE	0	157.388	122.612	-122.612	-157.388	0
COF	104.9253		-50.4873	50.4873		-104.9253
BALANCE	.....	.....	.....	.....	.....	.....
COF	.....	.....	.....	.....	.....	.....
BALANCE	0	0.0300	0.0234	-0.0234	-0.0300	0
COF	0.02					-0.02
M. AKHIR	128.002	192.0031	-192.0031	192.0031	-192.0031	-128.002



$$H_A = \frac{128.002 + 192.0031}{6}$$

$$H_A = 53.3342 \text{ kN } (\rightarrow)$$

$$H_B = \frac{128.002 + 192.0031}{6}$$

$$H_B = 53.3342 \text{ kN } (\leftarrow)$$

Reaksi pendel di D

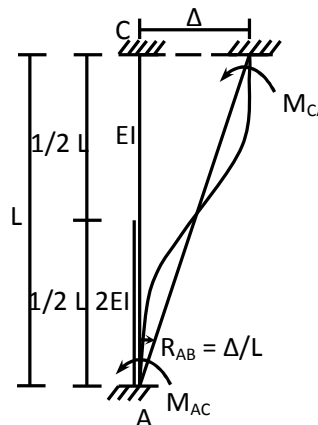
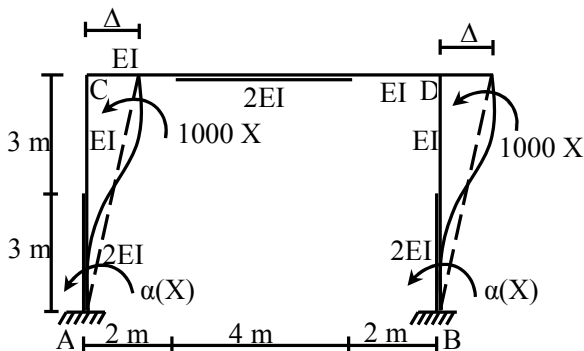
$$\sum H = 0$$

$$H_A - H_B + 100 - H_D^o = 0$$

$$53.3342 - 5.3342 + 100 - H_D^o = 0 \quad \longrightarrow \quad H_D^o = 100 \text{ kN } (\leftarrow\rightarrow)$$

## Tahap II

Akibat portal bergoyang (pendel di titik D dilepas)



$$M_{AC} = \frac{112EI\Delta}{11L^2} (-)$$

$$M_{CA} = \frac{80EI\Delta}{11L^2} (-)$$

$$\bar{M}_{CA} = 1000X = \frac{80EI\Delta}{11L^2}$$

$$EI = \frac{1000X(6)^2 \cdot 11}{80\Delta}$$

$$EI = \frac{4950X}{\Delta}$$

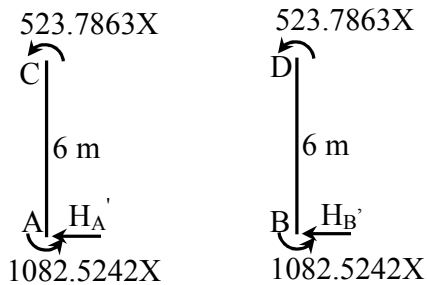
$$\bar{M}_{AC} = \frac{112EI\Delta}{11L^2} = \frac{112\Delta}{11(6)^2} \frac{4950X}{\Delta}$$

$$\bar{M}_{AC} = 1400X$$

Tabel 2. Perataan momen akibat goyangan

Titik	A	C		D		B
Batang	AC	CA	CD	DC	DB	BD
Koef. Dist	0	0.5621	0.4379	0.4379	0.5621	0
FEM	-1400X	-1000X	0	0	-1000X	-1400X
BALANCE	0	562.1X	437.9X	437.9X	562.1X	0
COF	374.7333X		180.3118X	180.3118X		374.7333X
BALANCE	.....	.....	.....	.....	.....	.....
COF	.....	.....	.....	.....	.....	.....
BALANCE	0	-0.1071X	-0.0835X	-0.0835X	-0.1071X	0
COF	-0.0714X					-0.0714X
M. AKHIR	-1082.5242X	-523.7863X	523.7863X	523.7863X	-523.7863X	-1082.5242X

Reaksi pendel di D akibat goyangan



$$H_A' = \frac{523.7863X + 1082.5242X}{6}$$

$$H_A' = 267.7184X (\leftarrow)$$

$$H_B' = \frac{523.7863X + 1082.5242X}{6}$$

$$H_B' = 267.7184X (\leftarrow)$$

Reaksi pendel di D

$$\sum H = 0$$

$$H_A' + H_B' = H_D' \longrightarrow H_D' = 535.4368X (\rightarrow)$$

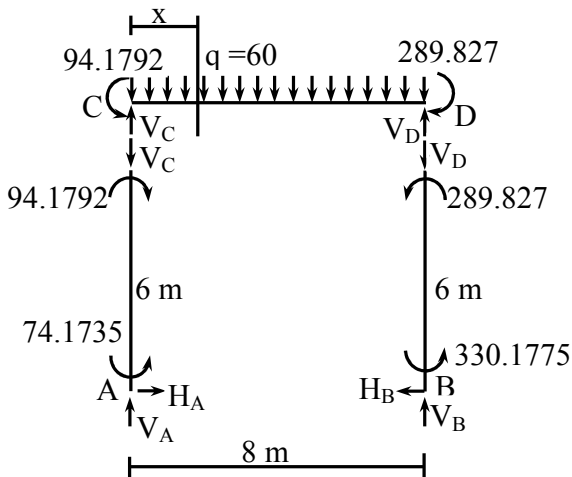
$$\text{Syarat } H_D^0 + H_D' = 0 \longrightarrow -100 + 535.4368X = 0 \longrightarrow X = 0.186763$$



Tabel 3. Momen total akhir

TITIK	A	C		D		B
BATANG	AC	CA	CD	DC	DB	BD
Akibat Portal tak Bergoyang	128.002	192.0031	-192.0031	192.0031	-192.0031	-128.002
Akibat Portal bergoyang	-1082.5242X -202.1755	-523.7863X -97.8239	523.7863X 97.8239	523.7863X 97.8239	-523.7863X -97.8239	-1082.5242X -202.1755
Momen total akhir	-74.1735	94.1792	-94.1792	289.827	-289.827	-330.1775

**Reaksi perletakan**



**Balok CD**

$$V_C = \frac{1}{2}(60)(8) + \frac{94.1792 - 289.827}{8}$$

$$V_C = 215.544 \text{ kN}$$

$$V_D = \frac{1}{2}(60)(8) + \frac{289.827 - 94.1792}{8}$$

$$V_D = 264.456 \text{ kN}$$

**Kolom AC**

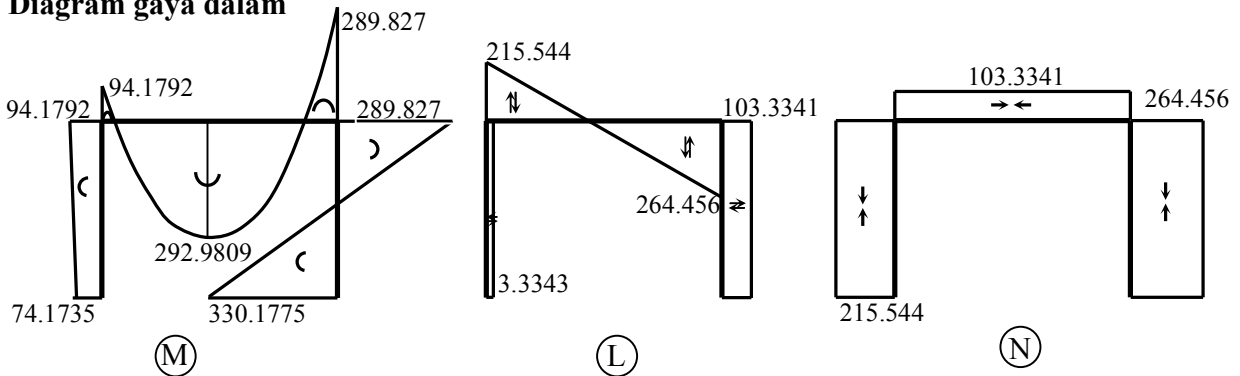
$$H_A = \frac{94.1792 - 74.1735}{6} = 3.3343 \text{ kN (}\rightarrow\text{)}$$

$$H_B = \frac{330.1775 + 289.827}{6} = 103.3341 \text{ kN (}\leftarrow\text{)}$$

$$V_A = V_C = 215.544 \text{ kN (}\uparrow\text{)}$$

$$V_B = V_D = 264.456 \text{ kN (}\uparrow\text{)}$$

**Diagram gaya dalam**



## KESIMPULAN

1. Hasil perhitungan dengan metode Cross ini cukup akurat dengan syarat perhitungan perataan momen harus dilakukan minimal lima kali dan diambil empat angka dibelakang desimal.
2. Dalam penyelesaian dengan metode Cross ini terlebih dahulu harus dicari besar faktor kekakuan, momen primer (baik akibat beban luar yang bekerja maupun akibat pengaruh pergoyangan), koefisien distribusi dan besaran carry over factor (koefisien induksi).
3. Untuk kondisi beban dan kekakuan yang lebih kompleks, bisa menggunakan bantuan program matematika dalam mencari faktor kekakuan, besaran momen primer (baik akibat beban luar yang bekerja maupun akibat pengaruh pergoyangan), koefisien distribusi dan besaran carry over factor (koefisien induksi).
4. Hasil perhitungan di atas sudah dibuktikan kebenarannya dengan perhitungan program komputer Grasp (Graphical Rapid Analysis of Structures Program).

## DAFTAR PUSTAKA

**Armenakas Anthony E. (1988)**, *Classical Structural Analysis, A Modern Approach*, McGraw Hill International Editions.

**Ghali. A and Neville.A.M. (1978)**, *Structural Analysis, A Unified Classical and Matrix Approach*, London Chapman and Hall,.

**Rooseno (1953)**, Perhitungan dengan *Metode Cross*, penerbit buku teknik H. STAM.

**Soemono (1971)**, Ilmu Gaya, Bangunan-bangunan Statis Tak Tertentu, Penerbit Djambatan.

**Wang C.K. (1985)**, *Intermediate Structural Analysis*, Mc Graw Hill International Book Company,.

**Wijaya Jemy, Itang Fanywati (2013)**, Penggunaan Metode Cross Pada Balok dengan Kekakuan Tidak Merata" Jurnal Kajian Teknologi Volume 9 Nomor 3, 167-178.

**Wijaya Jemy, Itang Fanywati (2014)**, Penggunaan Metode Slope Deflection Pada Struktur Statis Tak Tentu dengan Kekakuan yang Tidak Merata dalam Satu Balok" Jurnal Kajian Teknologi Volume 10 Nomor 2, 93-100.